

# 谐和与随机噪声联合参数激励下 Mathieu 系统的矩稳定性\*

张又又<sup>1</sup>, 戎海武<sup>2</sup>

(1. 佛山科学技术学院信息与教育技术中心, 广东 佛山 528000;  
2. 佛山科学技术学院数学系, 广东 佛山 528000)

**摘要:** 研究了确定性谐和与随机噪声联合参数激励下 Mathieu 系统的矩稳定性问题。通过适当的坐标变换和随机平均法, 将系统转化为一阶线性伊藤随机微分方程组。利用伊藤法则给出了系统一、二阶矩满足的常微分方程, 根据微分方程的稳定性理论得到了系统一阶矩稳定充分必要条件的解析表达式和二阶矩稳定充分必要条件的数值算法, 并对理论结果用数值方法进行了仿真计算。理论和数值结果表明, 无论是相对于一阶矩还是二阶矩的稳定性, 随着随机噪声强度变大、确定性谐和激励振幅变大, 系统的稳定性区域变小从而变得不稳定。而当调谐参数趋于零系统达到参数主共振情形时, 系统的稳定性区域变得最小。当随机噪声强度逐渐变小趋于零时, 由二种矩稳定性给出的稳定性区域变得一致。

**关键词:** Mathieu 系统; 参数主共振响应; 矩稳定性; 随机平均法

**中图分类号:** O324 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2012) 06-0025-05

## Moment Stability of Damped Mathieu Oscillator to Combined Harmonic and Random Noise Parametric Excitation

ZHANG Youyou<sup>1</sup>, RONG Haiwu<sup>2</sup>

(1. Information and Educational Technology Center, Foshan University, Foshan 528000, China;  
2. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

**Abstract:** The moment stability of a damped Mathieu oscillator to combined deterministic harmonic and random noise of the form of a stationary Gaussian process parametric excitation is investigated. The analysis is based on a suitable coordinate transformation and stochastic averaging method, which reduces the system to two linear Itô's stochastic differential equations. By using the Itô's differential rule, differential equations ruling the time evolution of the first and second order response moments are obtained. The necessary and sufficient conditions of stability for the first and second order moments are that the matrix of the coefficients of the differential equations ruling the moments have complex eigenvalues with negative real parts. The analytical expression of the stability condition of the first order moment is obtained, while results of the second order moment stability are given numerically. Some numerical simulations and graphs are presented for representative cases. It is founded that, when the intensity of the random noise and the amplitude of the deterministic harmonic excitation increase, the stability regions will reduce whether for the first order moment or the second order moment stability. The stability regions will reduce to the minimum value if the detuning parameter tend to zero. The stability regions based on different order moments will become identical when the intensity of the random noise increases to zero.

\* 收稿日期: 2012-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10772046, 50978058); 广东省自然科学基金资助项目 (7010407, 10252800001000000, 05300566); 全国优秀博士学位论文作者专项资金资助项目 (200954)

作者简介: 张又又 (1965年生), 女, 副教授; E-mail: zhangyy@fosu.edu.cn

**Key words:** Mathieu system, parametric principal resonance responses, moment stability, random averaging method

Mathieu 系统是一个典型的模型, 很多实际问题可以用该系统来描述, 并且具有丰富的动力学现象<sup>[1-2]</sup>。对于确定性谐和激励下 Mathieu 系统的稳定性问题, 已经有许多成熟的理论成果<sup>[3-4]</sup>。在实际系统中, 随机噪声往往是不可避免的, 例如研究暴风雨、地震和海浪等对系统的影响。研究随机噪声激励下 Mathieu 系统的响应问题引起的众多研究者的注意<sup>[5-11]</sup>, 也许首先研究此类问题的学者是 Stratonovich 和 Romanovski<sup>[5]</sup>, Cai 等<sup>[6]</sup>则研究了随机外激下 Mathieu 系统的响应。对于 Mathieu 系统, 人们更为关注的是随机参激下系统的稳定性问题, 而随机稳定性有多种定义, 常用的有几乎必然稳定性和矩稳定性等<sup>[12]</sup>。戎海武等<sup>[7]</sup>用多尺度法求出了随机参激下 Mathieu 系统的最大 Lyapunov 指数, 根据 Lyapunov 指数的符号可以确定系统的几乎必然稳定性。研究较多的是矩稳定性<sup>[8-10]</sup>, 都用随机平均法进行研究。Li 等<sup>[11]</sup>则用随机 Melnikov 方法研究了系统的分叉和混沌。而对于在确定性谐和与随机噪声联合激励情形, 则很少见到研究, 本文将在这方面做一些尝试。本文用随机平均法研究了在确定性谐和与随机噪声联合参数激励下 Mathieu 系统的矩稳定性问题, 对于一阶矩给出系统稳定充分必要条件的解析表达式, 对于二阶矩给出系统稳定充分必要条件的数值算法。

## 1 模型的提出及随机平均法

考虑受到确定性谐和与随机噪声联合参数激励下 Mathieu 系统

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\beta\Omega\dot{y} + \Omega^2[1 + \varepsilon f \sin \Omega_1 t + \sqrt{\varepsilon}\xi(t)]y = 0 \quad (1)$$

式中  $y$  上方的圆点表示对时间  $t$  的导数,  $\beta$  为系统的阻尼系数,  $\Omega$  代表系统的自然频率,  $\varepsilon \ll 1$  为小参数,  $f > 0$  和  $\Omega_1$  分别为确定性谐和激励的振幅和频率, 随机噪声  $\xi(t)$  为平稳高斯白噪声, 其谱密度函数为  $S_\xi(\omega) = \sigma^2$ 。当  $\sigma = 0$  时方程 (1) 就是受确定性谐和参数激励的 Mathieu 系统, 众所周知  $\Omega_1 = 2\Omega$  是参数主共振频率, 此时确定性系统的稳定性已经有许多成熟的研究成果<sup>[3-4]</sup>, 本文研究  $\Omega_1 \approx 2\Omega$  这种情形。引入调谐参数  $\delta$ ,  $\Omega^2 = \frac{\Omega_1^2}{4} + \varepsilon\delta$ , 可以将方程 (1) 转化为

$$\ddot{y} + \frac{\Omega_1^2}{4}y = -\varepsilon[2\beta\Omega\dot{y} + (\delta + \Omega^2 f \sin \Omega_1 t)]y - \sqrt{\varepsilon}\Omega^2\xi(t)y = 0 \quad (2)$$

由于 (2) 式右端有小参数  $\varepsilon$ , 可以用随机平均法<sup>[12-13]</sup>进行研究。(2) 式右端中有谐和激励  $\sin \Omega_1 t$ , 常用的坐标变换  $y(t) = a(t) \cos \varphi(t)$  不适合, 可以采用如下的坐标变换<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} y(t) = y_1(t) \cos \frac{\Omega_1 t}{2} + y_2(t) \sin \frac{\Omega_1 t}{2}, \\ \dot{y}(t) = -\frac{1}{2}\Omega_1 y_1(t) \sin \frac{\Omega_1 t}{2} + \frac{1}{2}\Omega_1 y_2(t) \cos \frac{\Omega_1 t}{2} \end{cases} \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (2) 式可得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\varepsilon[2\beta\Omega(y_1 \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} - \frac{1}{2}y_2 \sin \Omega_1 t) - \frac{\delta}{\Omega_1}y_1 \sin \Omega_1 t - \frac{2\delta}{\Omega_1}y_2 \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} - \frac{\Omega f}{2}y_1 \sin^2 \Omega_1 t - \Omega f y_2 \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} \sin \Omega_1 t] + \sqrt{\varepsilon}\Omega(\frac{1}{2}y_1 \sin \Omega_1 t + y_2 \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2})\xi(t), \\ \dot{y}_2 = \varepsilon[2\beta\Omega(\frac{1}{2}y_1 \sin \Omega_1 t - y_2 \cos^2 \frac{\Omega_1 t}{2}) - \frac{2\delta}{\Omega_1}y_1 \cos^2 \frac{\Omega_1 t}{2} - \frac{\delta}{\Omega_1}y_2 \sin \Omega_1 t - \Omega f y_1 \cos^2 \frac{\Omega_1 t}{2} \sin \Omega_1 t - \frac{\Omega f}{2}y_2 \sin^2 \Omega_1 t] - \sqrt{\varepsilon}\Omega(y_1 \cos^2 \frac{\Omega_1 t}{2} + \frac{1}{2}y_2 \sin \Omega_1 t)\xi(t) \end{cases} \quad (4)$$

对 (4) 式进行确定性和随机平均<sup>[12-13]</sup>可得如下 Stratonovich 意义下的随机微分方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\varepsilon\Omega(\beta - \frac{f}{4})y_1 + \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}y_2 + \frac{\sqrt{\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_1 \frac{dW_1(t)}{dt} + \frac{\sqrt{3\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_2 \frac{dW_2(t)}{dt}, \\ \dot{y}_2 = -\varepsilon\Omega(\beta + \frac{f}{4})y_2 - \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}y_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_2 \frac{dW_1(t)}{dt} + \frac{\sqrt{3\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_1 \frac{dW_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $W_1(t), W_2(t)$  是两个标准 Wiener 过程, 其形式导数  $\frac{dW_1(t)}{dt}, \frac{dW_2(t)}{dt}$  是平稳高斯白噪声过程。加上 Wong-Zakai 修正项可以将方程 (5) 转化为如下的伊藤随机微分方程<sup>[14]</sup>

$$\begin{cases} dy_1 = -\varepsilon\left[\Omega\left(\beta - \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right]y_1 dt + \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}y_2 dt + \\ \quad \frac{\sqrt{\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_1 dW_1(t) + \frac{\sqrt{3\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_2 dW_2(t), \\ dy_2 = -\varepsilon\left[\Omega\left(\beta + \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right]y_2 dt - \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}y_1 dt + \\ \quad \frac{\sqrt{\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_2 dW_1(t) + \frac{\sqrt{3\varepsilon\pi}}{2}\Omega\sigma y_1 dW_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

## 2 矩稳定性

从方程 (6) 可以看出，平凡解（零解） $y_1(t) = y_2(t) = 0$  是存在的，本文就讨论平凡解的稳定性。常见的稳定性讨论中主要有几乎必然稳定性和矩稳定性，本文讨论方程 (6) 平凡解的矩稳定性。在下面的推导过程中主要研究一、二阶矩的稳定性，其他高阶矩的稳定性可以类似讨论。引入数学期望算子  $E[\bullet]$ ，利用伊藤<sup>[12]</sup>法则由方程 (6) 可以得到一阶矩  $E[y_1], E[y_2]$  满足的常微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dE[y_1]}{dt} = -\varepsilon\left[\Omega\left(\beta - \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right]E[y_1] + \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_2], \\ \frac{dE[y_2]}{dt} = -\varepsilon\left[\Omega\left(\beta + \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right]E[y_2] - \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_1] \end{cases} \quad (7)$$

由常微分方程的理论可以知道  $E[y_1], E[y_2]$  稳定的充分必要条件是方程 (7) 系数矩阵的特征值  $\lambda$  的实部都小于零，容易知道  $\lambda$  满足的方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + \varepsilon\left[\Omega\left(\beta - \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right] & -\frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1} \\ \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1} & \lambda + \varepsilon\left[\Omega\left(\beta + \frac{f}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2\right] \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

由 (8) 式可以求得两个特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  为

$$\lambda_{1,2} = \varepsilon\left(-\Omega\beta + \frac{\pi}{2}\Omega^2\sigma^2 \pm \sqrt{\frac{\Omega^2 f^2}{16} - \frac{\delta^2}{\Omega_1^2}}\right) \quad (9)$$

由 (9) 式可以知道  $\lambda_1, \lambda_2$  的实部都小于零即  $E[y_1], E[y_2]$  稳定的充分必要条件是

$$\begin{cases} \beta > \bar{\beta} = \frac{\pi}{2}\Omega\sigma^2 + \sqrt{\frac{f^2}{16} - \frac{\delta^2}{\Omega_1^2\Omega^2}}, f > \frac{4|\delta|}{\Omega\Omega_1}, \\ \beta > \bar{\beta} = \frac{\pi}{2}\Omega\sigma^2, f < \frac{4|\delta|}{\Omega\Omega_1} \end{cases} \quad (10)$$

如果将系统的一阶矩从稳定到不稳定的变化现象看做为一种分叉行为，选取  $\beta$  为分叉参数，则由 (10) 式确定的  $\bar{\beta}$  是系统的随机分叉点，当  $\beta > \bar{\beta}$  即系统阻尼足够大时系统的一阶矩稳定，而当  $\beta < \bar{\beta}$  时系统的一阶矩不稳定。由 (10) 也可以看出，当确定性谐和激励的振幅  $f$  和随机噪声的强度  $\sigma$  变大时  $\bar{\beta}$  变大，系统的稳定性区域变小；当  $|\delta|$  减少时  $\bar{\beta}$  变大，当  $\delta = 0$  即系统处于参数主共振时  $\bar{\beta}$  达到最大。当  $\sigma = 0$  时时方程 (1) 就是受确定性谐和激励的 Mathieu 系统，此时由 (10) 给出的稳定性条件与文献 [3] (第 237 页) 得到的结论一致。

下面讨论系统的二阶矩的稳定性。同样利用伊藤法则可以由方程 (6) 可以得到二阶矩  $E[y_1^2], E[y_1 y_2], E[y_2^2]$  满足的常微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dE[y_1^2]}{dt} = \varepsilon\left[-2\Omega\left(\beta - \frac{f}{4}\right) + \pi\Omega^2\sigma^2\right]E[y_1^2] + \\ \quad \frac{2\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_1 y_2] + \frac{3\pi}{4}\Omega^2\sigma^2 E[y_2^2], \\ \frac{dE[y_1 y_2]}{dt} = -\frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_1^2] + \\ \quad \varepsilon\left(-2\Omega\beta + \pi\Omega^2\sigma^2\right)E[y_1 y_2] + \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_2^2], \\ \frac{dE[y_2^2]}{dt} = \frac{3\pi}{4}\varepsilon\Omega^2\sigma^2 E[y_1^2] - \frac{2\varepsilon\delta}{\Omega_1}E[y_1 y_2] + \\ \quad \left[-2\varepsilon\Omega\left(\beta + \frac{f}{4}\right) + \frac{5\pi}{4}\varepsilon\Omega^2\sigma^2\right]E[y_2^2] \end{cases} \quad (11)$$

由常微分方程的理论可以知道  $E[y_1^2], E[y_1 y_2], E[y_2^2]$  稳定的充分必要条件是方程 (11) 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \varepsilon \begin{bmatrix} -2\Omega\left(\beta - \frac{f}{4}\right) + \pi\Omega^2\sigma^2 & \frac{2\delta}{\Omega_1} & \frac{3\pi}{4}\Omega^2\sigma^2 \\ -\frac{\delta}{\Omega_1} & -2\Omega\beta + \pi\Omega^2\sigma^2 & \frac{\delta}{\Omega_1} \\ \frac{3\pi}{4}\Omega^2\sigma^2 & -\frac{2\delta}{\Omega_1} & -2\Omega\left(\beta + \frac{f}{4}\right) + \frac{5\pi}{4}\Omega^2\sigma^2 \end{bmatrix} = \varepsilon \mathbf{B} \quad (12)$$

特征值的实部都小于零。由 (12) 式可以知道矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  特征值实部符号相同，为了简单起见考虑矩阵  $\mathbf{B}$  的特征值  $\lambda$ ，容易知道  $\lambda$  满足的方程为

$$\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = \begin{vmatrix} \lambda + 2\Omega(\beta - \frac{f}{4}) - \pi\Omega^2\sigma^2 & -\frac{2\delta}{\Omega_1} & -\frac{3\pi\Omega^2\sigma^2}{4} \\ \frac{\delta}{\Omega_1} & \lambda + 2\Omega\beta - \pi\Omega^2\sigma^2 & -\frac{\delta}{\Omega_1} \\ -\frac{3\pi\Omega^2\sigma^2}{4} & \frac{2\delta}{\Omega_1} & \lambda + 2\Omega(\beta + \frac{f}{4}) - \frac{5\pi\Omega^2\sigma^2}{4} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

式中  $I_{3 \times 3}$  表示 3 阶单位矩阵。从 (13) 式可以看出,  $\lambda$  满足的方程是 3 次多项式方程, 3 次多项式方程根的解析表达式很复杂, 给定系统参数后可以用数值方法由 (13) 求出  $\lambda$  的数值解  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 则系统二阶矩稳定的充分必要条件是  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的实部都小于零,

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

类似一阶矩的情形, 可以用数值方法讨论二阶矩的稳定性分叉, 由 (14) 式确定出相应的分叉点  $\bar{\beta}$ 。至于三阶矩  $E[y_1^3], E[y_1^2 y_2], E[y_1 y_2^2], E[y_2^3]$  及更高阶矩的稳定性可以用伊藤法则类似讨论, 相应的特征值  $\lambda$  满足的是一个 4 次或 4 次以上的多项式方程, 只能用数值方法求解。

取系统参数为  $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, \delta = 1.0, f = 3.0$ , 当噪声强度  $\sigma$  变化时, 由 (10) 给出的  $\bar{\beta}$  的解析解和由 (14) 式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图 1, 图中实线和虚线分别表示一、二阶矩的稳定性区域的边界。线的上面是系统的稳定区域, 而线的下面则是不稳定区域。从图 1 可见, 无论是相对于一阶矩还是二阶矩的稳定性, 随着  $\sigma$  变大  $\bar{\beta}$  变大, 系统变得不稳定。同时可以看出二阶矩稳定性的边界曲线(虚线)在实线的上方, 表明二阶矩的稳定性要求强于一阶矩的稳定性, 这在理论上是显然的, 因为高阶矩稳定就意味着低阶矩也是稳定的。当  $\sigma$  较小时, 由二种矩稳定性给出的稳定性区域基本一致。

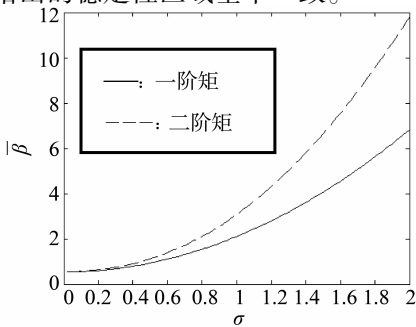


图 1 系统 (1) 矩稳定区域

Fig. 1 Moment stability regions of system (1)  
 $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, \delta = 1.0, f = 3.0$

取系统参数为  $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, \delta = 1.0, \sigma = 0.01, 0.8$ , 当确定性谐和激励的振幅  $f$  变化时, 由 (10) 式给出的  $\bar{\beta}$  的解析解和由 (14) 式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图 2 和图 3。从图 2 和图 3 可见, 无论相对于一阶矩还是二阶矩稳定性, 随着  $f$  变大  $\bar{\beta}$  变大, 系统的稳定性区域变小使得系统变得不稳定。计算表明, 当  $\sigma$  逐渐变小趋于零时, 由一、二阶矩给出的稳定性区域将变得一致 (见图 1 和图 3)。从图 2 和图 3 中还可以发现一种类似于确定性系统的跳跃现象, 在一定的参数区域, 确定性激励的强度  $f$  增加并不改变系统的稳定性, 当  $f$  的值超过某一阈值时, 系统的稳定性才发生变化, 我们不妨称这种现象为稳定性跳跃。

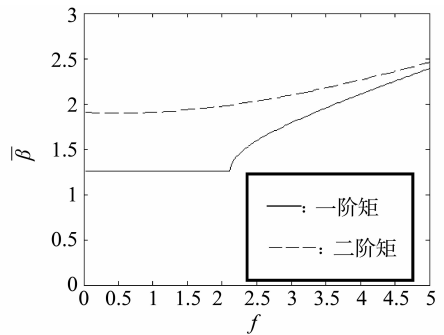


图 2 系统 (1) 矩稳定区域

Fig. 2 Moment stability regions of system (1)  
 $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, \delta = 1.0, \sigma = 0.8$

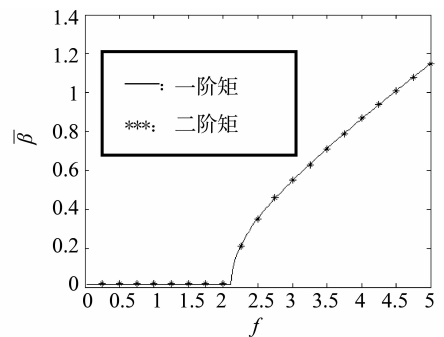


图 3 系统 (1) 矩稳定区域

Fig. 3 Moment stability regions of system (1)  
 $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, \delta = 1.0, \sigma = 0.01$

取系统参数为  $\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, f = 3.0, \sigma = 0.01, 0.8$ , 当调谐参数  $\delta$  变化时, 由 (10) 式给出的  $\bar{\beta}$  的解析解和由 (14) 式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图 4 和图 5。

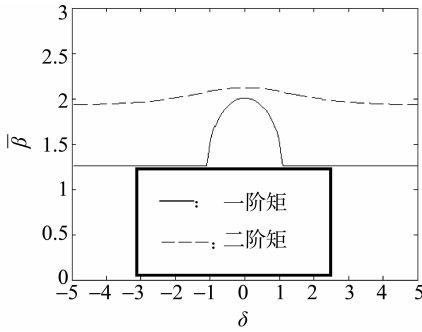


图4 系统(1)矩稳定区域

Fig. 4 Moment stability regions of system (1)

$$\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, f = 3.0, \sigma = 0.8$$

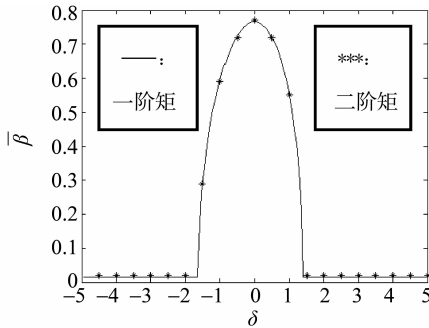


图5 系统(1)矩稳定区域

Fig. 5 Moment stability regions of system (1)

$$\Omega = 1.0, \varepsilon = 0.1, f = 3.0, \sigma = 0.01$$

从图4和图5可见,无论相对于一阶矩还是二阶矩稳定性,随着 $|\delta|$ 变小时 $\bar{\beta}$ 变大,系统的稳定性区域变小从而使得系统变得不稳定,当 $\delta = 0$ 即系统为参数主共振情形时 $\bar{\beta}$ 达到最大值。同样的,当 $\sigma$ 逐渐变小趋于零时,由一、二阶矩给出的稳定性区域将变得一致(见图5)。

### 3 结论与讨论

用随机平均法研究了确定性谐和与随机噪声联合参数激励下 Mathieu 系统的矩稳定性,给出了一阶矩稳定充分必要条件的解析表达式和二阶矩稳定充分必要条件的数值算法。结果表明,无论是相对于一阶矩还是二阶矩的稳定性,随着随机噪声强度变大、确定性谐和激励振幅变大,系统的稳定性区域变小从而使得系统变得不稳定,从而表明随机噪声使得系统不稳定化。而当调谐参数趋于零系统达到参数主共振情形时,系统的稳定性区域变得最小。当随机噪声强度逐渐变小趋于零时,由二种矩稳定性给出的稳定性区域变得一致。

本文中,变换(3)是一种比较有力的工具,可以用于处理确定性谐和与随机噪声联合激励的情形。从图2和图3中还发现一种类似于确定性系统跳跃现象的稳定域跳跃现象。

### 参考文献:

- [1] MCLACHLAN N W. Theory and application of Mathieu functions [M]. New York: Dover Publications, Mineola, 1962.
- [2] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. New York: Dover Publications, Mineola, 2009.
- [3] 周纪卿,朱因远. 非线性振动 [M]. 西安:西安交通大学出版社,1998.
- [4] MEIROVITCH L. Methods of analytical dynamics [M]. New York: Dover Publications, Mineola, 2003.
- [5] STRATONOVICH R L, ROMANOVSKI Y M. Parametric effect of a random force on linear and nonlinear oscillatory systems [C] // P I Kuznetsov, R L Stratonovich, V I Tikhonov, Eds. Nonlinear Transformation of Random Process, Oxford: Pergamon Press, 1965.
- [6] CAI G Q, LIN Y K. Nonlinear damped systems under simultaneous harmonic and random excitation [J]. Nonlinear Dynamics, 1994, 6: 163 - 177.
- [7] RONG H, MENG G, WANG X, et al. Invariant measures and Lyapunov exponents for stochastic Mathieu system [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 30: 313 - 321.
- [8] XIE W C. Dynamic Stability of Structures [M]. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [9] BOBRYK R V, CHRZESZCZYK A. Stability regions for Mathieu equation with imperfect periodicity [J]. Physics Letters A, 2009, 373: 3532 - 3535.
- [10] BROUWERS J J H. Asymptotic solutions for Mathieu instability under random parametric excitation and nonlinear damping [J]. Physica D, 2011, 240: 990 - 1000.
- [11] LI J, XU W, YANG X, et al. Chaotic motion of Van der Pol-Mathieu-Duffing system under bounded noise parametric excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 309: 330 - 337.
- [12] 朱位秋. 随机振动 [M]. 北京:科学出版社,1992.
- [13] DIMENTBERG M F. Statistical dynamics of nonlinear and time-varying systems [M]. Taunton: Research Studies Press, 1988.
- [14] WONG E, ZAKAI M. On the relation between ordinary and stochastic differential equations [J]. International Journal of Engineering Science, 1965, 3: 213 - 229.